UNIVERZITET U BEOGRADU – ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
KATEDRA ZA ELEKTRONIKU

DIGITALNA ELEKTRONIKA 1

Materijali za računske vežbe

KODOVI

Vežbe 5

Pripremio:
Haris Turkmanović (haris@etf.bg.ac.rs)

Beograd 2022

Sadržaj

1. Uvod

1.1. Kodovi

U digitalnim sistemimam se mogu koristiti različiti kodovi za predstavljanje decimalnih brojeva. U opštem slučaju, binarni kodovi se mogu razvrstati u 4 grupe:

- Težinski binarni kodovi
- Netežinski binarni kodovi
- Alfanumerički kodovi
- Kodovi sa mogućnošću detekcije greške

U okviru računskih vežbi obrađivaćemo bar jedan od kodova iz svake od grupa, osim alfanumeričkih.

1.1.1. Težinski kodovi

BCD8421

BCD8421, ili skraćeno BCD, predstavlja binarni težinski kod koji svaku cifru broja datog u decimalnom brojmo sistemu predstavlja na 4. Deo naziva 8421 označava težinu svakog od bita binarne predstave polazeći od cifre najveće težine. Tabela 1.1.1.1. ilustruje kodnu reč za svaku od cifara

Tabela 1.1.1.1 – *Pregled kodnih reči za BCD8421 binarni kodni sistem*

Cifra	Kodna reč
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Dakle, u slučaju kodovanja broja datog u decimalnom brojnom sistemu, odgovarajuću binarnu predstavu u kodu BCD8421 dobijamo tako što svaku od cifara kodujemo koristeći tabelu 1.1.1.1

BCD2421

Kao i BCD kod, i ovaj kod predstavlja svaku od cifara na 4 bita. Međutim, sadržaj tabele koja ilustruje kodovanje svake od cifara decimalne predstave broja, je drugačiji i prikazan je u okviru tabele 1.1.1.2

Tabela 1.1.1.2 – *Pregled kodnih reči za BCD2421 binarni kodni sistem*

Cifra	Kodna reč
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	1011
6	1100
7	1101
8	1110
9	1111

Na osnovu sadržaja tabele 1.1.1.2 možemo zaključiti da se cifre 0-4 koduju na isti način kao i u slučaju BCD koda. Međutim, kodne reči cifara 5-9 se dobijaju komplementiranjem cifara simetričnih u odnosu na crvenu osu simetrije (sredinu tabele). U opštem slučaju, kodovi kod kojih su predstave cifara u donjoj polovini tabele simetrični u odnosu na cifre iz gornje gornje polovine, spadaju u kategoriju komplementarnih kodova.

1.1.2. Netežinski kodovi

Više 3

Kao i BCD kodovi (BCD8421 i BCD2421) i ovaj kod na 4 bita predstavlja svaku od cifara broja datog u decimalnom zapisu. Međutim, ovaj težinski kod zsvaku od cifara koduje koristeći kodne reči predstavljene u tabeli 1.1.2.1

Tabela 1.1.2.1 – *Pregled kodnih reči za „više 3“ binarni kodni sistem*

Cifra	Kodna reč
0	0011
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1001
7	1010
8	1011
9	1100

Kao što se iz tabele 1.1.2.1 može primetiti, i ovaj kod spada u grupu komplementarnih kodova i izveden je iz BCD koda dodavanjem broja 3 na svaku od cifara.

Gray binarni

Za razliku od prethodnih kodova, koji su svaku od cifara decimalnog broja kodovali koristeći jasno definisanu tabelu kodnih reči, *Gray*-ov kod se može primeniti za kodovanje proizvoljnih brojeva. Glavna karakteristika *Gray*-ovog binarnog koda je da se kodne reči, koje odgovaraju susednim brojevima, razlikuju samo za jedan bit. Ova karakteristika je itekako značajna u sintezi digitalnih sistema kada treba sprečiti pojavu gličeva.

Postoje dva pristupa za određivanje kodne reči:

I) Prvi pristup pristup obuhvata sledeće korake:

1. Odredi se potrebna dužina kodne reči *n* za predstavu brojeva
2. Ukoliko je n=1, broju 0 odgovara *Grey*-ova kodna reč 0 dok broju 1 odgovara *Grey*-ova kodna reč 1
3. Ukoliko je dužina kodne reči veća od 1, kodne reči dužine *n* dobijamo iterativnim postupkom koji podrazuma postepeno određivanje kodnih reči dužine 2, 3 … sve do *n* i to tako što:

3.1. prva polovina 2^{n-1} kodnih reči se dobija tako što se za bit najveće težine uzme 0 dok preostali biti predstavljaju kodne reči *n-1 Gray*-ovog koda.

3.2. druga polovina 2^{n-1} kodnih reči se dobija tako što se za bit najveće težine uzme 1 dok preostali biti predstavljaju kodne reči *n-1 Gray*-ovog koda zapisane u obrnutom poretku.

U tabeli je ilustrovan postupak određivanja Gray binarnog koda za dužinu kodne reči n = 4.

Tabela 1.1.2.2 – *Postupak određivanja Gray-ovih binarnih kodnih reči dužine 4*

Cifra	**Korak**			
	I	II	III	IV
	n = 1	*n = 2*	*n = 3*	*n = 4*
0	0	00	000	0000
1	1	01	001	0001
2		11	011	0011
3		10	010	0010
4			110	0110
5			111	0111
6			101	0101
7			100	0100
8				1100
9				1101
10				1111
11				1110
12				1010
13				1011
14				1001
15				1000

II) Drugi pristup za određivanje kodne reči dužine *n* u slučaju binarnog *Gray*-ovog koda podrazumeva sledeći set koraka:

1. Biti b_i binarne predstave odgovarajućeg decimalnog broja se posmatraju s desna na levo i numerišu sa 0 … *n-1*. Smatramo da se na poziciji *n* nalazi 0.

2. Bit na poziciji *i* u kodnoj reči se dobija realizacijom operacije XOR cifara na mestima *i* i *i+1* odgovarajuće binarne predstave

n	n - 1	n - 2	…	1	0
0	b_{n-1}	b_{n-2}	…	b_1	b_0
	$c_{n-1} = 0 \oplus b_{n-1}$	$c_{n-2} = b_{n-1} \oplus b_{n-2}$	…	$c_1 = b_2 \oplus b_1$	$c_0 = b_1 \oplus b_0$

Na osnovu kodne reči $c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0$ date u *Gray*-ovom binarnog kodu moguće je odrediti binarnu vrednost $b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0$ ukoliko pratimo sledeći set koraka:

1. Cifra najveće težine se prepisuje
2. Cifra na poziciji *i* binarne predstave vrednosti se određuje tako što se realizuje operacija XOR prethodno dobijene cifre na poziciji *i+1* i cifre koja se nalazi na poziciji *i* u kodnoj reči

n - 1	n - 2	…	1	0
c_{n-1}	c_{n-2}	…	c_1	c_0
$b_{n-1} = c_{n-1}$	$b_{n-2} = b_{n-1} \oplus c_{n-2}$	…	$b_1 = b_2 \oplus c_1$	$c_0 = b_1 \oplus c_0$

***Gray* BCD**

Slično kao i u slučaju ostalih BCD kodova, i u slučaju *Gray*BCD koda se svaka od cifara broja koduje koristeći tabelu kodnih reči. Sadržaj tabele kodnih reči dat je u okviru tabele 1.1.2.3.

Tabela 1.1.2.3 – *Pregled kodnih reči za Gray BCD kodni sistem*

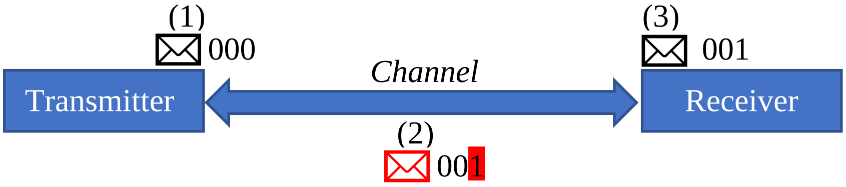
Cifra	Kodna reč
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101

Poređenjem tabele 1.1.2.3 i 1.1.2.2 možemo zaključiti da kodne reči odgovaraju binarnom *Gray*-ovom kodu.

1.1.3. Kodovi sa mogućnošću detekcije greške

Kodovi za detekciju greške su bazirani na osobini koja umogućava da usled bilo koje nepravilnosti rada digitalnog sistema dobijemo kodnu reč koja ne pripada skupu kodnih reči, odnosno da nije moguće detektovati podatak. Na primeru komunikacije dva digitalna sistema, pokušaćemo da ilustrujemo ideju na kojoj su bazirani kodovi za detekciju grešaka.

Na slici je prikazan digitalni sistem koji šalje podatke (*Transmiter*) i sistem koji prima podatke (*Receiver*). Između dva digitalna sistema je uspostavljen komunikacioni kanal (*Channel*).

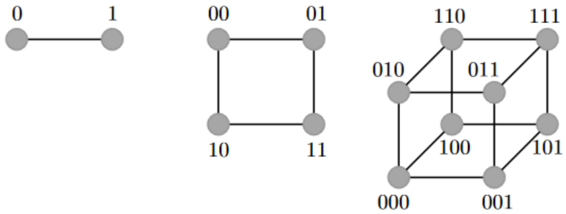


Na primer, neka se za kodovanje koristi *Gray* binarni kod i neka transmiter šalje podatak koji je kodovan sa 000_2. Usled smetnji koje su nastale na kanalu za prenos podataka, menja se vrednost bita na poziciji 0 i umesto da *Receiver* primi 000_2 on prima 001_2. Zbog toga što 001 pripada skupu kodnih reči u slučaju Gray binarnog koda, na prijemnoj strani nije moguće detektovati da je došlo do greške u prenosu. Dakle, postavlja se pitanje koje osobine treba da zadovolji kod koji ima mogućnost detekcije greške?

Kao deo odgovora na postavljeno pitanje neophodno je uvesti termin **Hamingovo rastojanje (H_d)** koje predstavlja broj mesta na kojima se razlikuju dve binarne predstave date na istoj dužini bita. Na primer, ako imamo binarnu predstavu broja A koja je jednaka 0110110_2 i broja B koja je jednaka 0110010_2, Hamingovo rastojanje je jednako 1, što zapisujemo:

$$H_d(A,B) = d(0110110_2, 0110010_2) = 1 \qquad (1.1.3.1)$$

Hamingovo rastojanje ima i svoju geometrijsku interpretaciju u vidu *n*-kocki koje predstavljaju oblike koji imaju onoliko čvorova (temena) koliko ima elemenata tog skupa dok su spojeni samo oni čvorovi (elementi skupa) između kojih je Hamingovo rastojanje jednako 1. Geometrijska interpretacija Hamingovog rastojanja za skup binarnih vrednosti gde je $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ je prikazana na slici 1.1.3.1



Slika 1.1.3.1 - Geometrijska interpretacija Hamingovog rastojanja

U slučaju skupa binarnih vrednosti, definiše se i **minimalno Hamingovo rastojanje H_{dmin}** kao minimalna vrednost *d* između svih parova tog skupa. Dakle, ukoliko skup binarnih vrednosti predstavlja BCD kod, dobijamo sledeće vrednosti Hamingovog rastojanja:

Tabela 1.1.3.1 – *Pregled Hamingovo rastojanje u slučaju BCD koda*

Hamingovo rastojanje	
d(0000, 0001) = 1	d(0001,0000) = 1
d(0000, 0010) = 1	d(0001,0010) = 2
d(0000, 0011) = 2	d(0001,0011) = 1
d(0000, 0100) = 1	d(0001,0100) = 2
d(0000, 0101) = 2	d(0001,0101) = 2
d(0000, 0110) = 2	…
d(0000, 0111) = 3	
d(0000, 1000) = 1	
d(0000, 1001) = 2	

Sa stanovišta mehanizma detekcije greške i skupa kodnih reči, minimalno Hamingovo rastojanje određuje minimalan broj bita koje je potrebno promeniti da bi se dobila sledeća reč iz skupa kodnih reči. Drugim rečima, minimalno Hamingovo rastojanja umanjeno za jedan definiše broj bita koje je moguće promeniti a da dobijena vrednost ne predstavlja kodnu reč. Ukoliko je minimalno Hamingovo rastojanje jednako 1, ne postoji mogućnost promene nijednog od bita a da budemo sigurni da neće doći do prelaska na neku definisanu kodnu reč. Dakle, ne postoji mogućnost detekcije greške. Osobina detekcije greške je karakteristika kodova sa Hamingovim rastojanjem 2 i više.

U opštem slučaju, za kod sa minimalnim hamingovim rastojanjem $\mathbf{H_{dmin}}$, važi:

$$H_{dmin} = 2n_c + n_d + 1 \quad (1.1.3.2)$$

gde je

- n_c – broj grešaka koje je moguće korigovati
- n_c – broj grešaka koje je moguće detektovati

Kod sa parnom i neparnom parnošću

Kod oba koda se dodaje bit najmanje težine koji pokazuje da li je u informacionim bitima broj jedinica paran (parna parnost) ili neparan (neparna parnost). U slučaju parne parnosti, ukoliko je broj jedinica neparan, dodati bit uzima vrednost 1. Na taj način se postiže da je broj jedinica u kodnoj reči paran. U slučaju neparne parnosti, ukoliko je broj jedinica paran, dodati bit se setuje na vrednost 1 jer se na taj način postiže neparan broj jedinica u kodnoj reči. Na taj način se dobija kod sa hamingovim rastojanjem 2 jer ukoliko se promeni jedan bit, promeniće se iparnost koda čime se detektuje greška. U tabeli 1.1.3.2 je dat primer za 3 informaciona bita

Tabela 1.1.3.2 – Primer parne i neparne parnosti na informacionim bitima dužine 3

Informacioni biti	Parna parnost	Neparna parnost
000	0000	0001
001	0011	0010
010	0101	0100
011	0110	0111
100	1001	1000
101	1010	1011
110	1100	1101
111	1111	1110

Zbog toga što je minimalno Hamingovo rastojanje u slučaju parne i neparne parnosti jednako 2, ovaj kod nema mogućnost korekcije već samo detekcije greške

Hamingov kod

Hamingov kod omogućava detektovanje do dve greške u bitima i korekciju jednog bita. Realizuje se dodavanjem redudantnih (kontrolnih) bita na informacione bite i to tačno na odgovarajuće pozicije. Kontrolni biti predstavljaju bite parnosti koji kontrolišu odgovarajuće bite poruke. Broj kontrolnih bita r u zavisnosti od broja informacionih bita m je definisan sledećom relacijom:

$$2^r \geq m + r + 1 \tag{1.1.3.3}$$

dok je dužina kodne reči definisana sa:

$$n = 2^r - 1 \tag{1.1.3.4}$$

Na osnovu 1.1.3.3 dobijamo da je maksimalan broj informacionih bita m koje je moguće zaštiti sa r kontrolnih bita definisan relacijom:

$$m = 2^r - r - 1 \tag{1.1.3.5}$$

Kodna reč se formira na sledeći način:

1. Pozicije bita u kodnoj reči se obeležavaju polazeći od 1 i predstavljaju se u binarnoj formi

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001

2. Kontrolni biti se u okviru kodne reči postavljaju na pozicijama koje odgovaraju stepenu broja 2 (1, 2, 4, 8, …)

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001
							C_8				C_4		C_2	C_1

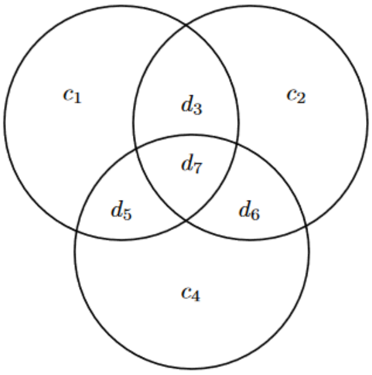
3. Informacioni biti se postavljaju na preostala mesta u kodnoj reči

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001
D_{10}	D_9	D_8	D_7	D_6	D_5	D_4	C_4	D_3	D_2	D_1	C_4	D_0	C_2	C_1

4. Svaki od kontrolnih bita kontroliše odgovarajuće bite kodne reči tako što predstavlja njihov bit parnosti. Kontrolni bit na poziciji *i* kontroliše one bite koji se nalaze na pozicijama čija binarna vrednost ima jedinice na mestima gde i kontrolni bit ima jedinice.

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001
D_{10}	D_9	D_8	D_7	D_6	D_5	D_4	C_4	D_3	D_2	D_1	C_4	D_0	C_2	C_1

Drugi način za analizu Hammingovog koda je kroz Venove dijagrame. Na slici je prikazan Venov dijagram za slučaj Hamingovog koda čija je dužina kodne reči jednaka 7 i koji ima 3 kontrolna bita.



Slika 1.1.3.1 – Interpretacija Hamingovog koda za slučaj dužine kodne reči 7.

Jedan od načina za identifikaciju bita na kome je došlo do greške jeste analizom sadržaja kontrolnih bita. Ako se svakom kontrolnom bitu koji pokazuje da nije došlo do greške pridruži 0, a svakom kontrolnom bitu koji ukazuje da je bilo greške pridruži 1, čitanjem dobijenog koda moguće je utvrditi na kom bitu je došlo do greške.

2. Zadaci sa časova vežbi

Zadatak 2.1.

a) Predstaviti sledeće decimalne brojeve u BCD kodu, kodu više 3, *Gray* – ovom BCD kodu, BCD2421 kodu i *Gray* – ovom binarnom kodu:

13, 0, 15, 49, 62

Za svaki od pomenutih kodova odrediti težinske koeficijente bita

b) Sledeće binarne brojeve prebaciti u decimalni brojni sistem ukoliko se interpretiraju kao brojevi zapisani u BCD kodu, kodu više 3, *Gray*-ovom BCD kodu, BCD2421 kodu i *Gray*-ovom binarnom kodu:

101001.100101, 10010011.1110101, 1011.101001

Rešenje:

a) Na osnovu postupka opisanog u 1.1 dobijamo:

Broj	BCD	BCD2421	Više 3	Gray BCD	*Gray* binarni
43	0100 0011	0001 0011	0111 0110	0001 0010	01101_2 = 1011
0	0000	0000	0011	0000	00_2 = 0000
15	0001 0101	0001 1011	0100 1000	0001 0111	01111_2 = 1000
49	0100 1001	0100 1111	0111 1100	0110 1000	0110001_2 = 101001
62	0110 0010	1100 0010	1001 0101	0101 0011	0111110_2 = 100001

b) Prilikom tumačenja binarnih brojeva kao decimalnih brojeva datih u određenom kodu, potrebno je obratiti pažnju na to da li dobijeni kodovi pripadaju kodnim rečima. Ukoliko pripadaju, moguće je odrediti decimalnu vrednost dok u suprotnom to nije moguće. U slučaju transofrmacije kodne reči koja sadrži decimalnu tačku i BCD predstava, cifre se posmatraju u odnosu na decimalnu tačku. U slučaju *Gray*-ovog binarnog koda, decimalna tačka se zanemaruje pa se nakon konverzije dodaje na odgovarajuće mesto.

Broj	BCD	BCD2421	Više 3	Gray BCD	*Gray* binarni
101001.100101	29.92	x	x	x	110001.000110 = 49.09375
10010011.1110101	x	x	x	x	11100010.1011001 = 226.6953125
1011.101001	x	x	8.71	x	1101.001110 = 13.21875

Zadatak 2.2.

Izvršiti sledeća sabiranja decimalnih brojeva u BCD kodu:

34 + 13, 35 + 86, 1026 + 192, 529 + 432

Rešenje:

Sabiranje BCD brojeva se realizuje na nivou binarnih BCD cifara, tj. sabirajući BCD cifru sa BCD cifrom. Ukoliko je neka od BCD cifara veća od 1001 (tj. 9), tada je potrebno dodati na tu cifru vrednost korekcije 0110 (tj. 6).

Izraz	Postupak	Rezultat
34 + 13	0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 Nema korekcije 0 0 1 1 0 0 0 1 **0 1 0 0 0 1 1 1** Nema korekcije	47_{BCD}
35 + 86	0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 Korekcija 1 **0 0 0 1** 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 Korekcija **1 0 0 1 0 0 0 0 1**	121_{BCD}
1026 + 192	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 **1 0 0 0** 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 Korekcija 1 **0 0 0 1 1 0 0 0** 0 0 0 0 0 0 0 1 0 **0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0** 0 0 0 1 **0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0**	1218_{BCD}
529 + 432	0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 Korekcija 1 **0 0 0 1** 0 0 1 0 0 0 1 1 0 **0 1 1 0 0 0 0 1** 0 1 0 1	961_{BCD}

	0 1 0 0 **1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1**	

Zadatak 2.3.

a) Odrediti Hammingovo rastojanje sledećih kodnih reči:

100 i 101, 110 i 011, 011 i 100

b) Za dekadni broj 23, odrediti sve brojeve koji su na *Hamming*-ovom rastojanju 1 od njega, ukoliko je broj predstavljen u BCD kodu, kodu vise 3, *Gray*-ovom BCD kodu, BCD 2421 kodu i *Gray*-ovom binarnom kodu.

Rešenje:

a) Na osnovu definicije Hamingovog rastojanja predstavljene u 1.1.3 važi:

$$10\underline{0} : 10\underline{1} \rightarrow H_d = 1$$
$$\underline{1}1\underline{0} : \underline{0}1\underline{1} \rightarrow H_d = 2$$
$$\underline{011} : \underline{100} \rightarrow H_d = 3$$

b) Na osnovu 1.1.3 važi:

Broj	BCD	BCD2421	Više 3	Gray BCD	*Gray* binarni
23	**0010 0011**	**0010 0011**	**0101 0110**	**0011 0010**	**11100**
Brojevi na H_d = 1	0110 0011=63	~~0110 0011~~	0111 0110=43	0011 0011=22	$11110_G \rightarrow 10100_2$=20
	0000 0011=3	0000 0011=03	~~1101 0110~~	0011 0110=24	$11101_G \rightarrow 10110_2$=22
	0011 0011=33	0011 0011=33	~~0001 0110~~	~~0011 1010~~	$11000_G \rightarrow 10000_2$=16
	0010 0111=27	~~1010 0011~~	0100 0110=13	0011 0010=23	$10100_G \rightarrow 11000_2$=24
	0010 0001=21	0010 0010=22	0101 0100=21	~~1011 0010~~	$01100_G \rightarrow 1000_2$=8
	0010 0010=22	~~0010 0111~~	0101 0111=24	0010 0010=33	
		0010 1011=25	~~0101 1110~~	0111 0010=53	
		0010 0001=21	~~0101 0010~~	0001 0010=13	

Zadatak 2.4

Odrediti mogućnost korekcije i detekcije 1-bitnih, 2-bitnih, 3-bitnih i 4-bitnih grešaka koda u kome je minimalno *Hamming*-ovo rastojanje kodnih reči 4. Ponoviti zadatak za slučaj koda sa minimalnim *Hamming*-ovim rastojanjem kodnih reči 5.

Rešenje:

a) Na osnovu relacije 1.1.3 važi da je u slučaju minimalnog hamingovog rastojanja 4 moguće:
   1) ($n_c = 0$; $n_d = 3$) detekcija trobitnih grešaka bez korekcije
   2) ($n_c = 0$; $n_d = 2$) detekcija dvobitnih grešaka bez korekcije
   3) ($n_c = 1$; $n_d = 1$) korekcija 1bitne geške i detekcija 1bitne greške

b) Na osnovu relacije 1.1.3 važi da je u slučaju minimalnog Hamingovog rastojanja 5 moguće:

   1) ($n_c = 0$; $n_d = 4$) detekcija četvorobitnih grešaka bez korekcije
   2) ($n_c = 0$; $n_d = 3$) detekcija trobitnih grešaka bez korekcije
   3) ($n_c = 1$; $n_d = 2$) detekcija dvobitnih grešaka i korekcija jednobitne greške
   4) ($n_c = 2$; $n_d = 0$) korekcija dvobitne geške i bez detekcije dodatnih grešaka

Zadatak 2.5

a) Predstaviti sledeće brojeve u kodu sa parnom, kao i kodu sa neparnom parnošću:

   100101, 10101011, 1101011, 110100101

b) Koliko iznosi minimalno rastojanje između dve kodne reči date u kodu sa parnom parnošću?

c) Da li kod sa parnom parnosti ima mogućnost detekcije greške? Da li kod sa neparnom parnosti ima mogućnost detekcije greške?

Rešenje:

a) Na osnovu opisa koda sa parnom i neparnom parnošću predstavljenog u 1.1.3, dobijamo:

Vrednost	Kod sa parnom parnošću	Kod sa neparnom parnošću
100101	1001011	1001010
10101011	101010111	101010110
1101011	11010111	11010110
110100101	1101001011	1101001010

b) Minimalno Hamingovo rastojanje iznosi 2 za oba koda

c) Na osnovu relacija 2.3.1 ni jedan od kodova ne podržava mogućnost korekcije već samo mogućnost detekcije greške

Zadatak 2.6.

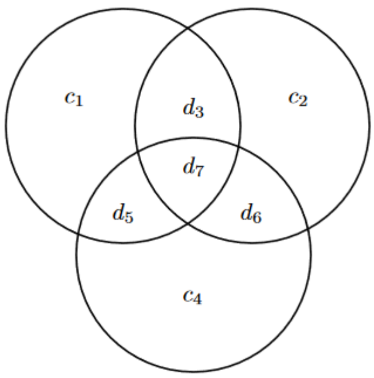
a) Izvršiti korekciju greške u prijemu ako je primljena sekvenca $d_7d_6d_5c_4d_3d_2c_1c_0$ = 1011100 kodirana *Hamming*-ovim kodom sa tri kontrolna bita koji proveravaju parnu parnost
b) Zaštiti originalnu sekvencu iz prethodne tačke sa kodom sa *Hamming*-ovim rastojanjem 4.
c) Koliki je maksimalni broj informacionih bita u kodnoj reči datoj u *Hamming*-ovom kodu sa minimalnim *Hamming*-ovim rastojanjem 3 ako imamo ukupno 5 kontrolnih bita.

Rešenje:

a) Pošto je pristigla sekvenca 1011100 potrebno je proveriti vrednosti kontrolnih bita:
   - 1011100 – bit c_1 ukazuje na grešku jer je broj jedinica neparan a kontrolni bit ima vrednost 0
   - 1011100 - bit c_2 ne ukazuje na grešku jer je broj jedinica na mestima koje kontroliše paran a kontrolni bit ima vrednost 0
   - 1011100 - bit c_4 ukazuje na grešku jer je broj jedinica na mestima koje kontroliše paran a kontrolni bit ima vrednost 1

Kako bi detektovali gde je došlo do greške neophodno je da na ispod kontrolnih bita koji su detektovali grešku upišemo 1 a ispod kontrolnih bita koji nisu detektovali grešku upišemo nulu a zatim pročitamo tako dobijeni kod. Dakle, $c_4c_2c_1$ = 101 ukazuje da se greška desila na poziciji 5 i da je ispravna sekvenca zapravo 1001100.

Drugi način za utvrđivanje pozicije na kojoj je došlo do greške jeste analizom Venovog dijagrama sa slike 2.6.1



Slika 2.6.1 – Interpretacija Hamingovog koda za slučaj dužine kodne reči 7.

Sa slike 2.6.1 se vidi da biti c_4 i c_1 zajedno kontrolišu bite d_7 i d_5 tako da oni predstavljaju kandidate za bite na kojima je došlo do greške. Pošto bit c_2 kontroliše bit d_7 jasno je da on nije pogrešan i zbog toga bit d_5 ostaje jedini mogući bit na kome je došlo do greške.

b) Da bi se zaštitila ova ista sekvenca kodom sa $H_d = 4$, potrebno je dodati kontrolni bit, a to je najednostavnije učiniti ako se doda bit parnosti za celu sekvencu. U tom slučaju ispravna sekvenca izgleda

1001100**1**

c) Na osnovu relacije 1.1.3.5 dobijamo:

$$m = 2^5 - 5 - 1 = 26 \tag{2.6.1}$$

3. Zadaci za samostalni rad